La trasmissione del calore

Finora ci siamo interessati solo della capacità del calore di trasferirsi da un corpo all'altro senza considerare due importanti aspetti: le modalità e i tempi di trasmissione.

Vediamo anzitutto le tre modalità di trasmissione:

- conduzione termica: trasferimento di energia dovuto all'interazione delle particelle a maggiore energia con quelle a minore energia. Nei liquidi e negli aeriformi avviene per collisione tra le particelle, nei solidi per vibrazione delle stesse. La legge di Fourier ci dice che il flusso termico q scambiato per conduzione è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura e alla superficie di scambio e inversamente proporzionale allo spessore del materiale, con costante K:

$$q = -K \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \ [W]$$

Con K conducibilità termica, in $\left[\frac{W}{mK}\right]$;

- convezione: è il trasferimento di calore tra una superficie solida e un fluido che implica sia conduzione che trasporto di massa. Esiste convezione naturale, dovuta a differenze di densità e di temperatura, e convezione forzata, dovuta a sistemi forzanti come ventilatori, pompe e vento. La legge di Newton per la convezione ci dice che il flusso termico q scambiato è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura e all'area di scambio, con costante h:

$$q = h \cdot A \cdot (T_s - T_\infty) \ [W]$$

Con h coefficiente di trasmissione del calore per convezione in $\left[\frac{W}{m^2K}\right]$. Il suo valore è determinato sperimentalmente. T_s è la temperatura della superficie, T_∞ quella della corrente convettiva.

- irraggiamento: il trasferimento di energia di questo tipo non richiede la presenza di un mezzo. Detta $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4}$ costante di Stephan-Boltzmann, la legge di Stephan-Boltzmann ci consente di calcolare il flusso termico emesso in relazione alla superficie di emissione:

$$q = \sigma \cdot A \cdot T^4 \ [W]$$

Caso ideale per corpo nero. Nel caso reale si usa il coefficiente correttivo ε, $0 \leq \varepsilon \leq 1$; $q = \varepsilon \sigma A T^4$. Per valutare la potenza termica scambiata per irraggiamento tra due superfici (una a T_s molto meno estesa dell'altra, nera, a T_c) separate da gas non interferente con la radiazione, si usa la formula: $q_{in} = \varepsilon \sigma A (T_s^4 - T_c^4)$.

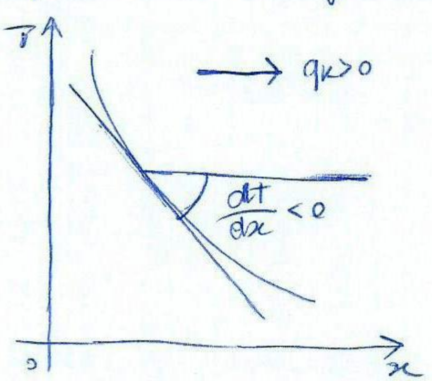
Come vedremo, il calore può trasferirsi contemporaneamente in due o tre modalità.

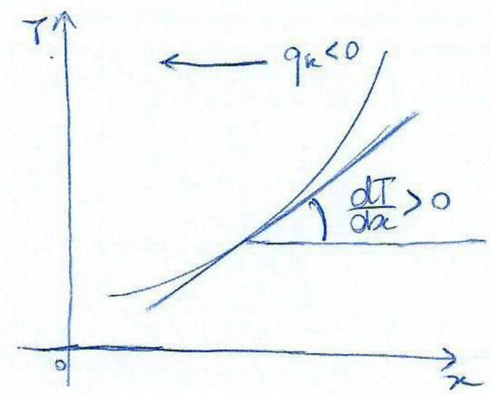
Conduzione termica

Ricordiamo l'equazione di Fourier:

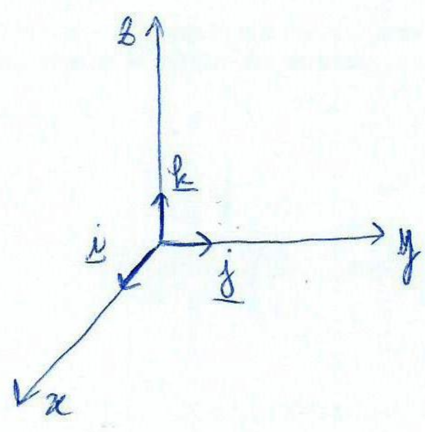
$$q_k = -KA\frac{dT}{dx}$$

In cui K, o λ, è la conducibilità termica del materiale, cioè la potenza termica che si trasmette attraverso uno spessore unitario del materiale per unità di superficie e per differenza di temperatura unitaria. Si misura quindi in $\left[\frac{W}{mK}\right]$.
Varia da materiale a materiale, ed è tanto più elevata quanto meno il materiale è isolante. A è l'area di scambio termico, perpendicolare alle linee di flusso. $\frac{dT}{dx}$ è il gradiente di temperatura in direzione delle linee di flusso.
Vediamo perché c'è il segno meno:





Introducendo il segno meno, q_k ha segno positivo quando il suo verso coincide con quello di x, negativo nel caso contrario.
Analizziamo il caso tridimensionale:



$$\underline{q} = q_x\underline{i} + q_y\underline{j} + q_z\underline{k}$$

$$q_x = -KA\frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -KA\frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -KA\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\underline{q} = -KA\frac{\partial T}{\partial x}\underline{i} - KA\frac{\partial T}{\partial y}\underline{j} - KA\frac{\partial T}{\partial z}\underline{k}$$

In particolare, se il mezzo è omogeneo e isotropo, cioè conduce il calore ugualmente in tutte le direzioni:

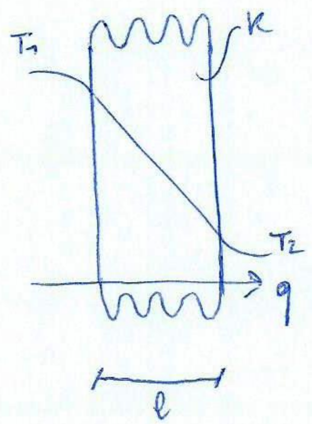
$$\underline{q} = -KA\left(\frac{\partial T}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\underline{k}\right) = -KA\,\mathrm{grad}\,T = -KA\cdot\nabla T$$

Si può anche parlare di flusso termico specifico, cioè riferito all'unità di superficie:

$$q'' = \frac{q}{A} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Il caso monodimensionale

Torniamo al monodimensionale. Consideriamo una parete piana indefinitamente estesa:



$T_1 > T_2$

$$q = -KA \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^l q\,dx = \int_{T_1}^{T_2} -KA\,dT \Leftrightarrow ql = -KA(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow q = KA\frac{T_1 - T_2}{l}$$

Su un piano parallelo alle facce la temperatura è uniforme. Proviamo a integrare rispetto a un piano generico a distanza x:

$$\int_0^x q\,dx = \int_{T_1}^{T(x)} -KA\,dT \Rightarrow q\cdot x = -KA(T(x) - T_1)$$

Uguagliamo all'equazione precedente:

$$-\frac{\cancel{KA}}{x}\cdot(T(x) - T_1) = \cancel{KA}\,\frac{T_1 - T_2}{l} \Rightarrow T(x) = T_1 - \frac{x}{l}(T_1 - T_2)$$

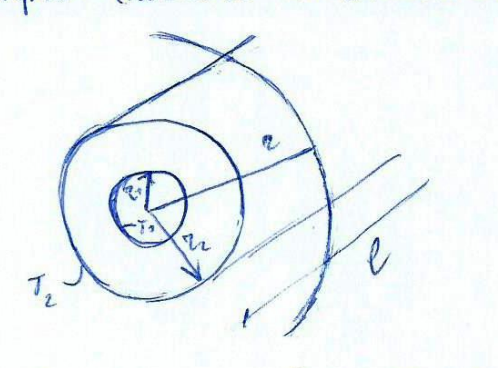
Con buona approssimazione questo caso ideale vale anche per quelli reali di pareti sufficientemente ampie.

Il calore per propagare deve superare resistenze termiche. Si usa allora il paragone con quelle elettriche:

elettrica : $I = \frac{V}{R_e}$ termica : $q = \frac{\Delta T}{R_k}$

Quindi se $q = \frac{\Delta T}{R_k} \Rightarrow R_k = \frac{\Delta T}{q} = \frac{l}{KA}$.

Sempre nel caso monodimensionale vediamo la geometria cilindrica:



Il cilindro è indefinitamente lungo:

$$q = -KA\frac{dT}{dr} \Leftrightarrow q = -K\,2\pi r\,l\,\frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} q\,\frac{dr}{r} = \int_{T_1}^{T_2} -2\pi K l\,dT \Leftrightarrow q\ln\frac{r_2}{r_1} = -2\pi K l(T_2 - T_1)$$

$$\Leftrightarrow q = 2\pi K l\,\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Qualunque superficie cilindrica coassiale al cilindro è isoterma. Alla generica distanza r si ha:

$$\int_{r_1}^{r} q\,\frac{dr}{r} = \int_{T_1}^{T(r)} -2\pi K l\,dT \Leftrightarrow q\ln\frac{r}{r_1} = -2\pi K l\,(T(r) - T_1) \Rightarrow q = 2\pi K l\,\frac{T_1 - T(r)}{\ln r/r_1}$$

Uguagliamo:

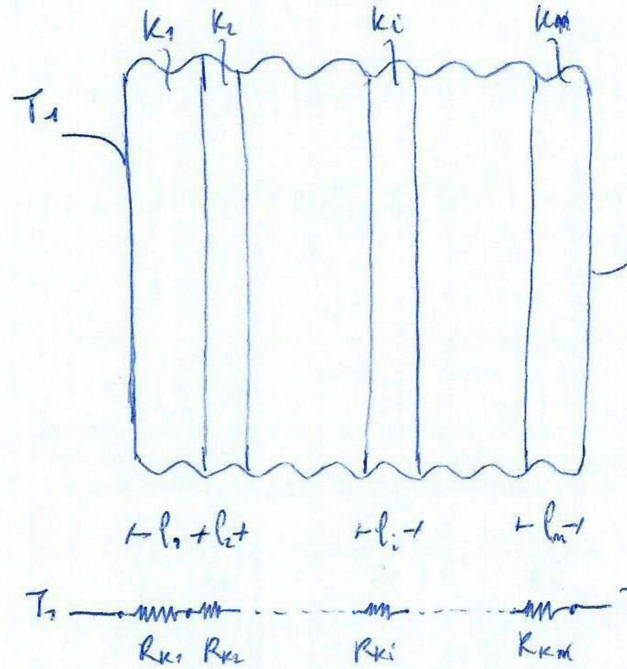
$$\cancel{2\pi K l}\,\frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1} = \cancel{2\pi K l}\,\frac{T_1 - T(r)}{\ln r/r_1} \Rightarrow T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\,\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

L'analogia elettrica conduce alla resistenza termica cilindrica:

$$R_k = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi K l}$$

Parete multistrato - resistenze termiche e flusso termico

Concentrandoci sulla parete piana, vediamo cosa accade quando abbiamo tanti strati verticali:



È come avere resistenze elettriche in serie:

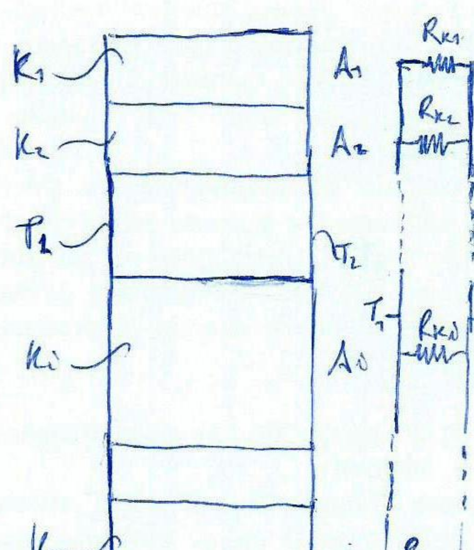
$$R_{K_i} = \frac{l_i}{A_i K_i} \Rightarrow R_{K_{TOT}} = \sum_{i=1}^{n} R_{K_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{A K_i}$$

Il flusso termico è:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_{K_{TOT}}} = \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{A K_i}} = \frac{A(T_1 - T_2)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{K_i}}$$

T prende il posto di V.

Se gli strati sono orizzontali:



T_1 e T_2 sono uniformi su tutta l'estensione della parete (assunzione teorica, nella realtà pressoché impossibile poiché gli strati sono di materiali diversi). È come avere resistenze elettriche in parallelo:

$$R_{K_i} = \frac{l_i}{A_i K_i} \Rightarrow R_{K_{TOT}} = \left(\frac{1}{R_{K_1}} + \frac{1}{R_{K_2}} + \dots + \frac{1}{R_{K_i}} + \dots + \frac{1}{R_{K_n}}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{K_i}}\right)^{-1}$$

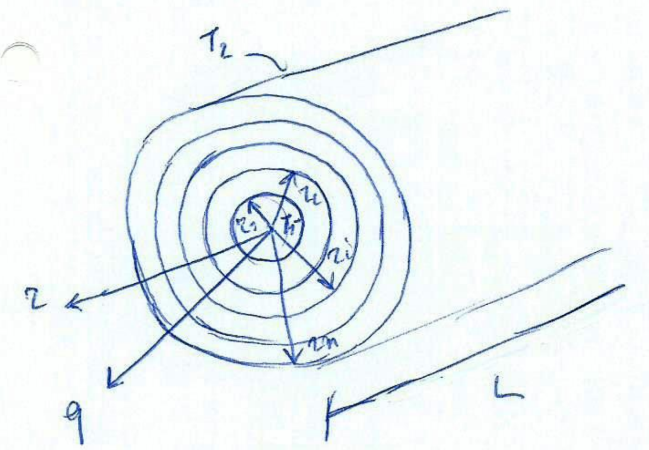
Servirebbe in realtà un'analisi pluridimensionale.

Flusso termico:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i A_i}{l_i}\right)^{-1}}$$

Cilindro multistrato - resistenze termiche e flusso termico

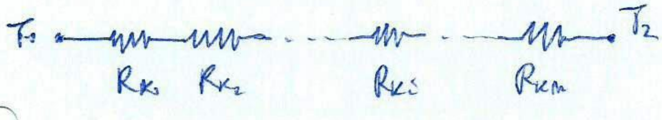
Partiamo dalle resistenze termiche in serie (cilindri concentrici):



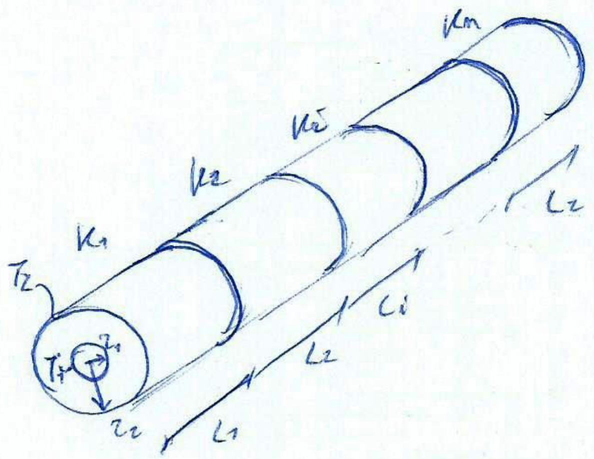
$$R_{Ki} = \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{2\pi K_i L} \Rightarrow R_{K_{TOT}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{2\pi K_i L}$$

Il flusso termico è:

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{2\pi K_i L}}$$



Ecco le resistenze termiche in parallelo (cilindri in successione):



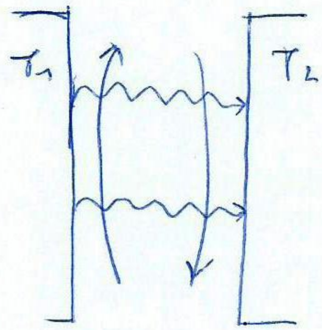
$$R_{Ki} = \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{2\pi K_i L} \Rightarrow R_{K_{TOT}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{Ki}}\right)^{-1}$$

Il flusso termico è:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_K}\right)^{-1}}$$

Meccanismi combinati di scambio termico - La trasmittanza

Nella realtà il calore si propaga contemporaneamente in vari modi. Immaginiamo di avere due superfici piane alle temperature T_1 e T_2 tra le quali è presente un gas, cioè non c'è il vuoto. Si avrà allora trasmissione di calore sia per convezione che per irraggiamento:



Introducendo h_{irr}, il coefficiente di scambio termico per irraggiamento si ha:

$$q_{irr} = A_1 F_{1,2}\,\sigma\,(T_1^4 - T_2^4) \quad \text{(sup. nere)}$$

$$q_{irr} = A_1 \mathcal{F}_{1,2}\,\sigma\,(T_1^4 - T_2^4) \quad \text{(sup. reali)}$$

$$q_{irr} = h_{irr} \cdot A_1 (T_1 - T_2^*) = h_{irr} \cdot A_1 (T_1 - T_2) \text{ se } T_2^* = T_2$$

Con $F_{1,2}$ e $\mathcal{F}_{1,2}$ fattori di vista, che analizzeremo in seguito.

Uguagliamo:

$$\cancel{A_1} \mathcal{F}_{1,2}\,\sigma\,(T_1^4 - T_2^4) = h_{irr} \cancel{A_1} (T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow h_{irr} = \frac{\mathcal{F}_{1,2}\,\sigma\,\cancel{(T_1 - T_2)}(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)}{\cancel{T_1 - T_2}} = \mathcal{F}_{1,2} \cdot \sigma\,(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)$$

Poniamo $\sigma (T_1 + T_2)(T_2^2 + T_2^2) = F_T$, fattore termico. Se $T_2^* = T_a$ si ottiene $q_{irr} = h_{irr} A_1 (T_1 - T_a)$. Coinvolgendo anche la convezione, cioè $q_{conv} = h_{conv} \cdot A_1 (T_1 - T_a)$, il flusso termico totale è:

$$q_{TOT} = q_{conv} + q_{irr} = h_{conv} A_1 (T_1 - T_a) + h_{irr} A_1 (T_1 - T_a) =$$
$$= (h_{conv} + h_{irr})\, A_1 (T_1 - T_a)$$

In cui h_{conv} è il coefficiente di scambio termico convettivo. Definiamo infine coefficiente di scambio termico liminare la somma $h_{conv} + h_{irr} = h_e$. Quindi, in definitiva ($[h_e] = \left[\frac{W}{m^2 K}\right]$):

$$q_{tot} = h_e A_1 \cdot (T_1 - T_a)$$

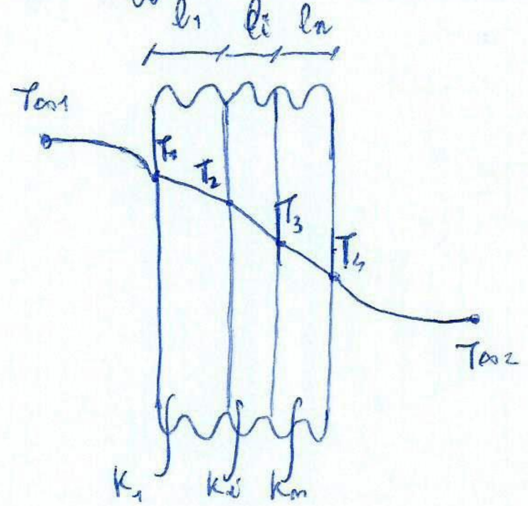
Per introdurre un coefficiente di scambio termico globale dobbiamo considerare un sistema in cui siano presenti tutte e tre le modalità di scambio termico: conduzione, convezione e irraggiamento.

Già a questo punto possiamo definire le resistenze termiche liminari, che ci serviranno subito dopo:

$$R_{lim} = \frac{1}{h_e \cdot A} \quad \left[\frac{K}{W}\right]$$

È la resistenza che comprende convezione e irraggiamento.

Recuperiamo ora la geometria piana (parete multistrato), nella quale troviamo la conduzione che va ad aggiungersi alla convezione e all'irraggiamento esterni ad essa:



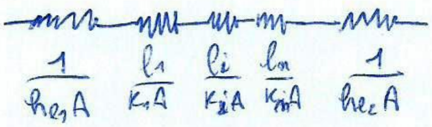
$$R_{cond_i} = \frac{l_i}{K_i \cdot A} \; , \; R_{lim_i} = \frac{1}{h_{e_i} \cdot A}$$

$$\Rightarrow q_{cond} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} R_{cond_i}} \; , \; q_{lim} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} R_{lim_i}}$$

Quindi globalmente:

$$q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_{e1}A} + \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{K_i A} + \frac{1}{h_{e2}A}} = \frac{A(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\frac{1}{h_{e1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{K_i} + \frac{1}{h_{e2}}} =$$

$$= \overline{K} \; A \; (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})$$

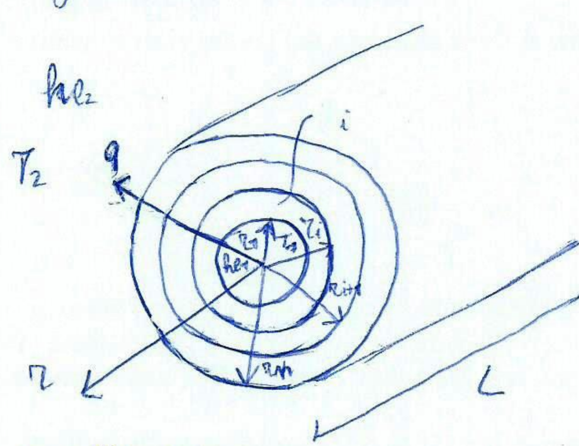


Abbiamo cioè definito il coefficiente di scambio termico globale, cioè la trasmittanza $\overline{K}$ (o U, in $\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$):

$$\overline{K} = \left(\frac{1}{h_{e1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{k_i} + \frac{1}{h_{e2}} \right)^{-1}$$

Se ci sono pareti o ponti termici bisogna tenerne conto: si usano, a livello professionale, appositi software.

Con geometria cilindrica:

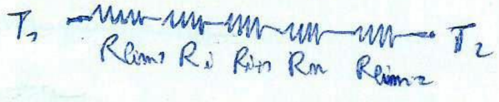


$$R_{cond_i} = \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{2\pi K_i L} \; , \; R_{lim_i} = \frac{1}{2\pi r_i L h_{e_i}}$$

$$\Rightarrow q_{cond} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} R_{cond_i}} \; , \; q_{lim} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} R_{lim_i}}$$

Quindi globalmente:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_{e1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{2\pi K_i L} + \frac{1}{2\pi r_{n+1} L h_{e2}}}$$



Il termine a denominatore è sempre il coefficiente di scambio termico globale U, espresso in $\left[\frac{W}{K}\right]$. Possiamo anche riferirlo all'unità di lunghezza o all'unità di area:

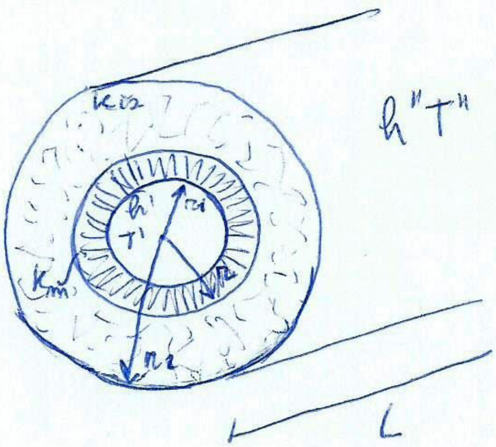
$$U_L = \frac{U}{L} = \frac{2\pi}{\frac{1}{h_{e1} r_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{K_i} + \frac{1}{h_{e2} r_{n+1}}} \left[\frac{W}{m K}\right] \qquad U_A = \frac{U}{2\pi r_{n+1} L} = \frac{1}{\frac{r_{n+1}}{h_{e1} r_1} + r_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{k_i} + \frac{1}{h_{e2}}} \left[\frac{W}{m^2 K}\right]$$

$$\Rightarrow q = U_L \cdot L \cdot (T_1 - T_2) \qquad \Rightarrow q = U_A \, A \, (T_1 - T_2)$$

In alcuni casi qualche termine a denominatore può essere trascurabile

Lo spessore critico dell'isolante

In alcuni casi non serve aggiungere strati di isolante, anzi aggiungendoli il flusso termico aumenta. Vediamo come ciò sia possibile, nel caso di geometria cilindrica:



$$T' \xrightarrow{\frac{1}{h' 2\pi r_1 L}} T(r_1) \xrightarrow{\frac{\ln r/r_1}{2\pi K_m L}} T(r) \xrightarrow{\frac{\ln r_2/r}{2\pi K_{is} L}} T(r_2) \xrightarrow{\frac{1}{2\pi h'' r_2 L}} T''$$

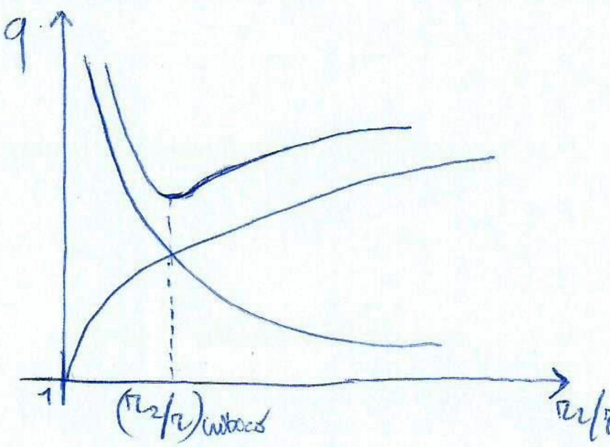
Per conoscere le temperature interne usiamo la formula vista poco fa relativa allo spessore parziale:

$$q = U_i A_i (T_1 - T_i)$$

Vediamo il flusso termico:

$$q = \frac{T' - T''}{\underbrace{\cancel{\frac{1}{2\pi r_1 L h'}}}_{\simeq 0} + \underbrace{\cancel{\frac{\ln r/r_1}{2\pi K_m L}}}_{\simeq 0} + \frac{\ln r_2/r}{2\pi K_{is} L} + \frac{1}{2\pi r_2 L h''}} \simeq \frac{2\pi L K_{is}(T' - T'')}{\ln(r_2/r) + \frac{K_{is}}{h''(r_2/r)\cdot r}}$$

Il primo termine a denominatore va a zero poiché h' è elevato, il secondo perché K_m è elevato. In definitiva il flusso dipende da $\ln(r_2/r)$ e r_2/r: è logaritmico e iperbolico. Graficamente:



Per il valore critico di r_2/r la resistenza termica dell'isolante è massima e il valore del flusso termico è minimo. Per determinarlo dobbiamo derivare q rispetto a r_2/r.

Derivata:

$$\frac{dq}{d(r_2/r)} = \frac{2\pi K_{is} L (T' - T'')}{\left[\ln(r_2/r) + \frac{K_{is}}{h''_e (r_2/r) r}\right]^2} \cdot \left[\frac{1}{r_2/r} - \frac{K_{is}}{h''_e \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 r}\right] = 0$$

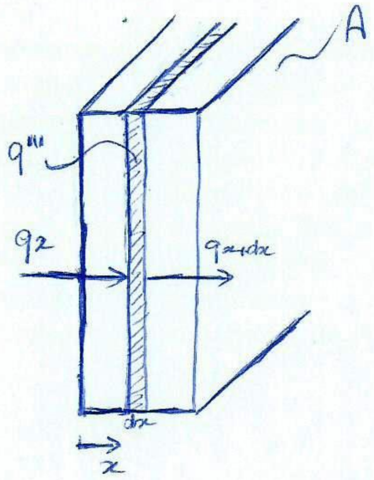
$$\Rightarrow \frac{1}{r_2/r} = \frac{K_{is}}{h''_e \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 r} \Rightarrow \left(\frac{r_2}{r}\right)_{critico} = \frac{K_{is}}{h''_e r} = \frac{1}{Bi}$$

$Bi = \frac{h''_e r}{K_{is}}$ è il numero di Biot:

- se $\frac{1}{Bi} < 1$ $\nexists$ spessore critico;
- se $\frac{1}{Bi} > 1$ $\exists$ spessore critico.

L'equazione generale della conduzione

Consideriamo una parete soggetta a flusso termico:



Il calore si propaga in un mezzo che già di per sé emana calore per unità di volume $q'''\left[\frac{W}{m^3}\right]$. La variazione temporale di energia interna è:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = q_x - q_{x+dx} + q''' dV$$

Ricordiamo l'equazione di Fourier:

$$q_x = -KA\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{d}{dx} q_x \, dx =$$

$$= -KA\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(KA\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx$$

Inoltre abbiamo:

$$q''' dV = q''' A\, dx \qquad \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\rho c\, dV\, \partial T}{\partial \tau} = \frac{\rho c A\, dx\, \partial T}{\partial \tau}$$

Quindi:

$$\cancel{-KA\frac{\partial T}{\partial x}} \cancel{+KA\frac{\partial T}{\partial x}} + \frac{d}{dx}\left(KA\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx + q''' A\,dx = \rho c A\,dx \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow KA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q''' A = \rho c A \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{\rho c}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

In cui $\frac{k}{\rho c} = a$ diffusività termica $[m^2/s]$, che compare solo nei problemi non stazionari, in cui è influente il tempo. Quindi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Nei termini più generali (tridimensionalità e temporalità) l'equazione di Fourier è:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \Rightarrow \nabla^2 T + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Nel caso stazionario, $\frac{\partial}{\partial \tau} = 0$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{k} = 0$$

Se $q''' = 0$, oltre alla stazionarietà temporale, abbiamo l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Per risolvere tale equazione abbiamo bisogno di un set di equazioni al contorno: una di tipo temporale, 3×2 di tipo spaziale.
Temporalmente:

$$T(\underline{r}, \tau_0) = T_0(\underline{r})$$

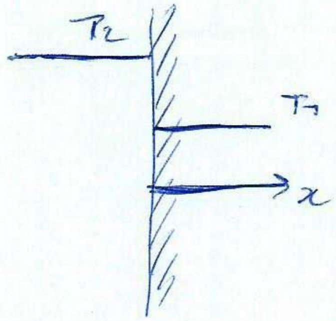
Spazialmente:

$$T_\sigma(\underline{r}, \tau) = T(\underline{r}, \tau) \quad \text{su } \sigma \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma = f(\underline{r}, \tau) \quad \text{su } \sigma$$

(temperatura imposta) (flusso imposto)

Il problema del mezzo semi-infinito

Il mezzo semi-infinito ha un'unica superficie piana e si estende all'infinito. Serve a dimostrare che la variazione di temperatura in prossimità della superficie dipende dalle condizioni termiche su un'unica superficie. Considerando un esempio, la temperatura in prossimità della superficie terrestre dipende dalla temperatura della superficie terrestre stessa. Abbiamo:



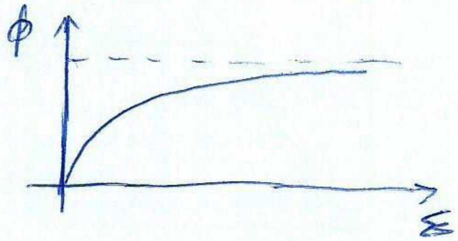
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Definiamo $\varepsilon = \frac{x}{\sqrt{2a\tau}}$ variabile della funzione degli errori di Gauss:

$$\phi(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varepsilon} e^{-\varepsilon^2}\, d\varepsilon$$

L'integrale generale dell'equazione e il grafico di ϕ sono:

$$T = A + B\cdot\phi(\varepsilon)$$



Condizioni al contorno:

a) $\tau = 0 \Rightarrow \forall x \; T = T_1$ b) $\tau > 0 \Rightarrow x \to 0 \; T = T_2$

Quindi:

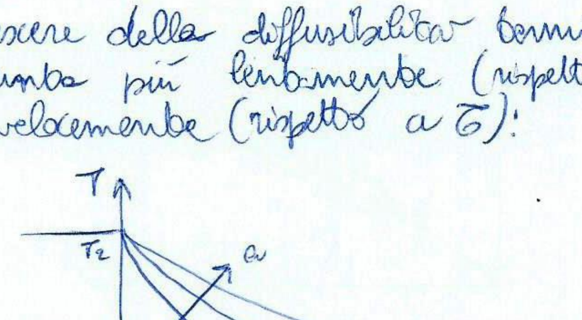
a) se $\tau \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to \infty \Rightarrow \phi = 1 \Rightarrow T_1 = A + B$

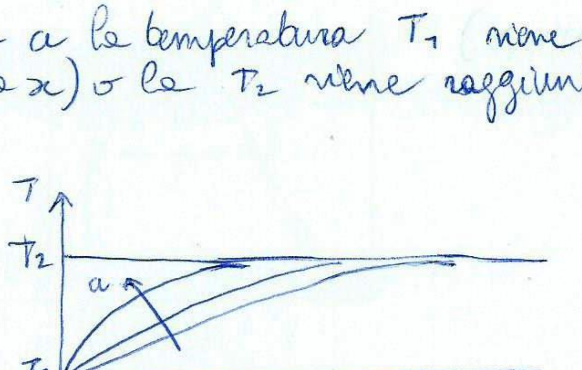
b) se $x = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow T_2 = A$

La soluzione è:

$$\begin{cases} A = T_2 \\ B = T_1 - T_2 \end{cases} \Rightarrow T = T_2 + (T_1 - T_2)\,\phi(\varepsilon)$$

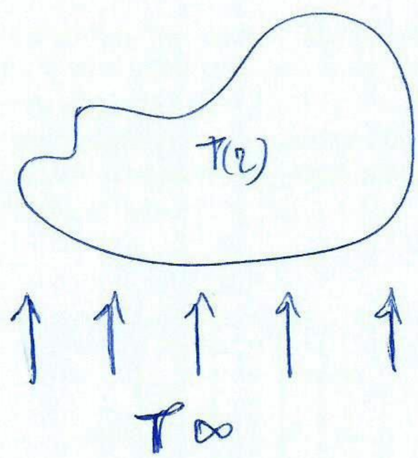
Al crescere della diffusività termica a la temperatura T_1 viene raggiunta più lentamente (rispetto a x) e la T_2 viene raggiunta più velocemente (rispetto a τ):





Il problema del corpo sottile

Consideriamo un corpo sottile investito da una corrente d'aria a temperatura T_∞:



a) $\frac{dQ}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau}$, $\frac{dU}{d\tau} = \rho c V \frac{dT}{d\tau}$

b) $\frac{dQ}{d\tau} = q = -hA(T(\tau) - T_\infty)$

Quindi:

$$\rho c V \frac{dT}{d\tau} = -hA(T(\tau) - T_\infty)$$

In cui a secondo membro abbiamo un termine noto.

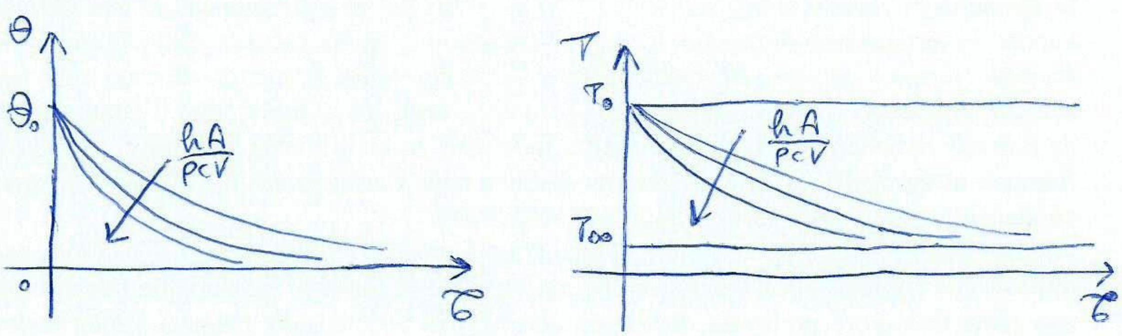
Usiamo la coordinata ausiliaria $\theta(\tau) = T(\tau) - T_\infty$ per linearizzare:

$$\rho c V \frac{d\theta}{d\tau} = -hA\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho c V} d\tau$$

Avendo $\theta(\tau_0) = \theta_0 = T_0 - T_\infty$ la soluzione è:

$$\ln\frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{hA}{\rho c V}\tau \Rightarrow \theta = \theta_0 \cdot e^{-\frac{hA}{\rho c V}\tau}$$

Graficamente:



Il numero di Biot distingue i corpi sottili da quelli non sottili:

$$Bi = \frac{hL}{k_{solido}} \quad \begin{cases} Bi < 0{,}1 & \text{se corpo sottile} \\ Bi > 0{,}1 & \text{se corpo non sottile} \end{cases}$$

In cui h è il coefficiente di scambio termico del fluido e L è la grandezza significativa, rapporto tra volume del solido (cavo o pieno) e area della superficie a contatto col fluido:

$$L = V/A$$